Marcos Pedrero

# Una teoría para el cálculo de los contravientos en los Puentes Metálicos. (1)

CONSIDEREMOS un puente vía inferior de cabezas paralelas con dos vigas horizontales de contraviento AB y CD. Designemos por q, 2p y $q_1$ las resultantes de los empujes horizontales por metro corrido de puente sobre las cabezas superiores, el enrejado y las cabezas inferiores respectivamente. La flexión horizontal de las dos vigas de contraviento sometidas a los momentos de flexión X y X′ nos da las dos ecuaciones:

$$1)\qquad E\frac{d^2y}{dx^2}=X$$

$$2)\qquad E'\frac{d^2z}{dx^2}=X'$$

y y z representan los desplazamientos horizontales de una distancia x de un apoyo y medidos a partir de un plano vertical AC ocupado por una de las vigas antes de la desformación (fig. 2). Designemos por a el largo de un paño.

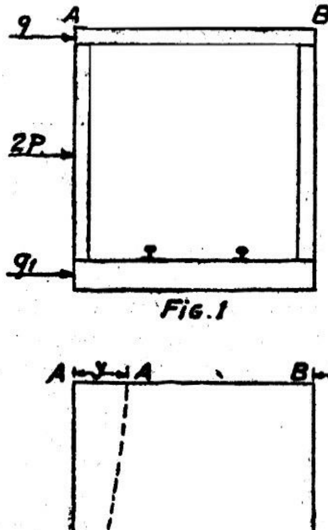


Fig. 1

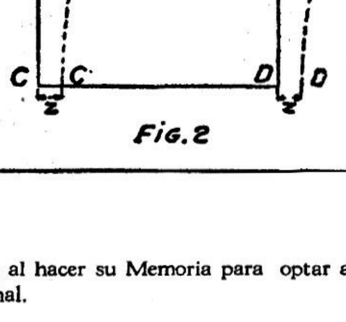


Fig. 2

(1) Esta teoría fué desarrollada por el infrascrito al hacer su Memoria para optar al título de Ingeniero; tiene por lo menos el valor de ser original.

Cada montante AC o BD podemos considerarlo solicitado por una fuerza va aplicada en A′ o B′, y por una carga uniformemente repartida igual a $\frac{p.a}{h}$ (fig. 3), por consiguiente la flecha en su extremo es ignal

$$y - z = K'v + np$$

Los coeficientes K′ y n dependen de los momentos de inercia de las barras que forman el enrejado. En el tipo Monier las barras oblícuas son de rigidez pequeña y entonces para obtener K′ y n basta tomar en cuenta el momento de inercia de los montantes que son barras de gran rigidez. Consideraremos constantes E y E′.

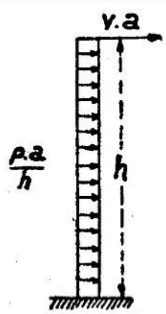

Fig. 3

El empuje q del viento sobre las cabezas superiores se descompone en dos partes: La primera correspondiente a la viga superior de contraviento la designaremos por v. Esta viga debe pues considerarse apoyada en los montantes extremos y solicitada por una carga de repartición variable v que nos proponemos determinar. La segunda parte corresponde a los montantes de las dos vigas verticales del puente y tiene por valor 2 v por metro corrido; ella es trasmitida por intermedio de los montantes flexionados a la viga inferior de contraviento (ver fig. 2) luego

$$2v + r = q$$

Las dos ecuaciones que nos faltan para determinar el problema las obtendremos considerando que la segunda derivada del momento de flexión en una viga con una carga de repartición variable o constante t tiene por valor

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -t$$

Aplicando esta relación a las dos vigas de contraviento tenemos entonces

$$5)\qquad \frac{d^2X}{dx^2} = -r$$

$$\frac{d^2X'}{dx^2} = -(q' + 2p + 2v)$$

y designando

$$r' = q_1 + 2p$$

se deduce

$$6) \qquad \frac{d^2X'}{dx^2} = -r' + r - q$$

Derivando la ecuación (1) obtenemos

$$\frac{E\,d^4y}{dx^4} = \frac{d^2X}{dx^2}$$

y considerando (5)

$$7) \qquad \frac{E\,d^4y}{dx^4} = -r$$

Análogamente se deduce de (2) y (6)

$$8) \qquad \frac{E'd^4y}{dx^4} = -r' + r - q$$

De (7) y (8) se deduce

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^4Z}{dx^4} = \frac{r'+q}{E'} - \frac{r(E+E')}{EE'}$$

Derivando ecuaciones (3) y (4) obtenemos fácilmente

$$10) \qquad \frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^4Z}{dx^4} = \frac{K'\,d^4v}{dx^4} = -\frac{K'd^4r}{2dx^4}$$

Combinando estas dos últimas obtenemos la ecuación diferencial del problema propuesto.

$$11) \qquad \frac{K'}{2}\,\frac{d^4r}{dx^4} = \frac{r\,(E+E')}{EE'} = \frac{r'+q}{E'}$$

Su solución general es:

$$12) \qquad r = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 \cos \alpha x + C_4 \operatorname{sen} \alpha x + \frac{q+r'}{E+E'} \cdot E$$

siendo

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{2\,(E+E'}{K'EE'}}$$

DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES

Determinaremos las constantes en la suposición de que q y r' ocupen toda la longitud del puente; en r' se puede incluir la acción del viento sobre el tren pues este empuje es trasmitido a la viga inferior de contraviento.

$$\text{Para} \quad x = 0 \qquad r = r_0$$

luego reemplazando en (12):

$$r_0 = C_1 + C_2 + C_3 + \frac{q + r'}{E + E'} \cdot E \tag{13}$$

Derivando (12) se tiene:

$$\frac{dr}{dx} = C_1 \alpha e^{\alpha x} - C_2 \alpha e^{-\alpha x} - C_3 \alpha \operatorname{sen} \alpha x + C_4 \alpha \cos \alpha x \tag{14}$$

De ecuaciones (3) y (4) se deduce

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = - \frac{K'}{2} \frac{dr}{dx}$$

Si se considera la simetria de la soliatación respecto a la mitad de luz del puente se deduce para $x = \frac{l}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = O \qquad \frac{dz}{dx} = O \qquad \text{luego} \qquad \frac{dr}{dx} = O$$

y reemplazando en (14)

$$C_1 e^{\frac{l\alpha}{2}} - C_2 e^{-\frac{l\alpha}{2}} - C_3 \operatorname{sen} \frac{\alpha l}{2} + C_4 \cos \frac{\alpha l}{2} = O \tag{15}$$

La 2.ª derivada de (12) nos da

$$\frac{d^2r}{dx^2} = C_1 \alpha^2 e^{\alpha x} + C_2 \alpha^2 e^{-\alpha x} - C_3 \alpha^2 \cos \alpha x - C_4 \alpha^2 \operatorname{sen} \alpha x \tag{16}$$

Por otra parte si consideramos las vigas de contraviento apoyadas en sus extremos tendremos para x = O.

$$X = 0 \qquad X' = 0$$

luego

$$\frac{d^2y}{dx^2} = O$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = O$$

$$\frac{d^2r}{dx^2} = O$$

y reemplazando en (16):

17) $$C_1 + C_2 - C_3 = O$$

La 3.ª derivada de (12)

18) $$\frac{d^3r}{dx^3} = C_1\,\alpha^3 e^{\alpha x} - C_2\,\alpha^3 e^{-\alpha x} + C_3\,\alpha^3 \operatorname{sen} \alpha x - C_4\,\alpha^3 \cos \alpha x$$

De ecuación (5) se deduce:

$$\frac{DX}{dx} - \left(\frac{dX}{dx}\right)_o = -\int_{x_0}^{x} r\,dx$$

siendo $\frac{DX}{dx}$ y $\left(\frac{dX}{dx}\right)_o$ las tanjentes a la curva de los momentos de flexión en x y $x_0$ respectivamente.

La relación (19) aplicada entre $x=\frac{l}{2}$ y $x_0=O$ nos da:

20) $$\left(\frac{dX}{dx}\right)_o = \int_o^{\frac{l}{2}} r\,dx$$

En efecto $\frac{dX}{dx}=O$ para $x=\frac{l}{2}$

Análogamente se obtiene.

21) $$\left(\frac{dX'}{dx}\right)_o = \int_o^{\frac{l}{2}} (r'+q-r)\,dx$$

Por otra parte de (1) y (3) se obtiene para $x=O$

$$E\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_o = \left(\frac{dX}{dx}\right)_o$$

$$E'\left(\frac{d^3 Z}{dx^3}\right)_o = \left(\frac{dX'}{dx}\right)_o$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^3 Z}{dx^3} = -\frac{K'}{2}\left(\frac{d^3 r}{dx^3}\right)_o = \frac{1}{E}\left(\frac{dX}{dx}\right)_o - \frac{1}{E'}\left(\frac{dX'}{dx}\right)_o$$

y considerando (20) y (21)

$$-\frac{K'}{2}\left(\frac{d^3 r}{dx^3}\right)_o = \frac{1}{E}\int_o^{\frac{l}{2}} r\,dx - \frac{1}{E'}\int_o^{\frac{l}{2}} (r'+q-r)\,dx$$

de donde

$$\frac{d^3 r}{dx^3} = \frac{2}{K'E'}\int_o^{\frac{l}{2}} (r'+q)\,dx - \frac{2\,(E+E')}{K'EE'}\int_o^{\frac{l}{2}} r\,dx$$

De (18) para $X=O$ se tiene

$$\left(\frac{d^3 r}{dx^3}\right)_o = \alpha^3\,(C_1-C_2-C_4)$$

Igualando las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$\alpha^3(C_2-C_2-C_4) = \frac{1}{K'E'}\int_o^{l} (r'+q)dx - \frac{E+E'}{K'EE'}\int_o^{l} r dx$$

Reemplazando el valor de r definido por ecuación (12), y efectuando las integrales se obtiene

$$22)\qquad C_1(1+e^{l\alpha})-C_2(1+e^{l\alpha})+C_3\,\text{sen}\,\alpha l-C_4(1+\cos l\alpha)=O$$

Si aplicamos la ecuación (3) inmediatamente antes del apoyo, debemos hacer

$$X=O \quad y=b \quad Z=O$$

luego

$$23)\qquad b = K'v_0 + np = K'\left(\frac{q - r_0}{2}\right) + np$$

La flecha del montante de apoyo solicitado en su extremo por las dos fuerzas

$$\frac{v_0 a}{2} = \frac{p - r_0}{4} \cdot a$$

$$y \qquad \frac{1}{l}\int_o^l rdx \qquad \text{tiene por expresión}$$

$$24)\qquad b = \frac{K'_0}{a}\left[\frac{1}{l}\int_o^l rdx + \frac{q - r_0}{4} \cdot a\right]$$

De (23) y (24) obtenemos

$$25)\qquad K'\left(\frac{q - r_0}{2}\right) + np = \frac{K'_0}{a}\left[\frac{1}{l}\int_o^l rdx + \frac{q - r_0}{4} \cdot a\right]$$

siendo

$$26)\qquad \int_o^l rdx = \int_o^l \left[C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 \cos \alpha x + C_4 \operatorname{sen} \alpha x + \frac{q + r'}{E + E'} E\right] dx$$

Tenemos entonces los ecuaciones (13), (15), (17), (22), (25) y (26) entre las seis constantes $C_1$ $C_2$ $C_3$ $C_4$ $r_0$ y $\int_o^l rdx$. El problema queda pues así completamente determinado.

## Análisis de la ecuación (12). Simplificación gráfica

La viga superior de contraviento debe considerarse apoyada en los montantes extremos y sometida a una carga repartida horizontal variable definida por ecuación (12)

$$r = \frac{q + r'}{EE'} E + C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 \cos \alpha x + C_4 \operatorname{sen} \alpha x$$

En esta ecuación q, r', E, E', $\alpha$, $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ son constantes. Combinando sas ecuaciones (15), (17) y (22) sc obtione fácilmente

$$C_2 = C_1\, e^{\alpha L}$$

$$C_3 = C_1 + C_2 = C_1\,(1 + e^{\alpha L}$$

$$C_4 = C_3 \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} = (1 + e^{\alpha L}) \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} \cdot C_1$$

siendo L la luz del tramo.

Reemplazando en la ecuación (12) obtenemos:

$$r = \frac{q + r'}{E + E'} \cdot E + C_1 \left(e^{\alpha x} + e^{\alpha (L - x)}\right) + C_1 \left(1 + e^{\alpha L}\right)\left(\cos \alpha x + \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} \operatorname{sen} \alpha x\right)$$

ecuación que se compone de 3 partes. La primera parte es la constante $\frac{q+r'}{E+E'} \cdot E$ que representamos por una recta paralela AB al eje de las x.

La segunda parte

$$V = C_1 \left( e^{\alpha x} + e^{\alpha (L - x)} \right)$$

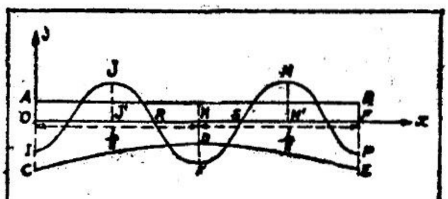

FIG. 4

representa una curva CDE simétrica respecto a la mitad del tramo; en efecto, si se reemplaza L—x en lugar de x la función anterior no cambia. El número corresponde a $x = \frac{L}{2}$ y tiene por valor

$$V_m = 2\, C_1 e^{\frac{\alpha L}{2}} = HD$$

Para x=O y X=L se tiene

$$V = C_1 \left(1 + e^{\alpha L}\right) = OC = FE$$

La tercera parte

$$W = C_1 \left(1 + e^{\alpha L}\right)\left(\cos \alpha x + \operatorname{tg} \frac{\alpha L}{2} \operatorname{sen} \alpha x\right)$$

es una sinusoide de período

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\,\overline{RS}$$

simétrica respecto a la mitad del tramo; para demostrarlo basta reemplazar L—x en lugar de x. Su amplitud es fácil obtener, pues siendo simétrica basta hacer $x = \frac{L}{2}$ para obtenela

$$W_1 = \frac{C_1 (1 + e^{\alpha L})}{\operatorname{Cos}\frac{\alpha L}{2}} = HN = JJ' = MM'$$

La representamos por la curva I J N M P.

Para el trazado necesitamos obtener $C_1$. Para obtenerlo reemplazamos en ecuación (26) $C_2$, $C_3$, y $C_4$ en función de $C_1$. Efectuada la integración llevaremos el valor de $\int_0^1 r dx$ así obtenida en ecuación (25) que combinada con (13) por eliminación de $r_0$ nos da finalmente para $C_1$ la expresión siguiente

$$C_1 = \frac{q - \frac{q + r'}{E + E'} E \left(1 + \frac{K'_0 L}{4 a m}\right) + \frac{pn}{m}}{2\left(1 + e^{\alpha L}\right) + \frac{K'_0\left[e^{\alpha L} - 1 + \left(1 + e^{\alpha L}\right) \operatorname{tg}\frac{\alpha L}{2}\right]}{2 a \alpha m}}$$

síendo

$$m = \frac{K'}{2} - \frac{K'_0}{4}$$

## Puente con dos vigas longitudinales de contraviento y momentos de inercia variables

Hemos resuelto el problema, pero en la hipótesis que los momentos de inercia de vigas y montantes sea constante en todo el tramo, lo que en la práctica no sucede.

Es fácil establecer la ecuación diferencial para el caso de vigas y montantes de inercia variables.

Si suponemos $E = E'$ obtenemos entonces de ecuaciones (1) y (2)

$$\frac{E\, d^2 (y - z)}{dx^2} = X - X'$$

$$\text{28)} \qquad \frac{d^2 E \frac{d^2 (y - z)}{dx^2}}{dx^2} = \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{d^2 X'}{dx^2}$$

*De ecuaciones (5) y (6):*

29) $$\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{d^2X'}{dx^2} = r' + q - 2r$$

Por otra parte, designando por *i* el momento de inercia variable de los montantes del puente podemos escribir la ecuación (3) en la forma

$$y - Z = \frac{K_1 v}{i} + \frac{np}{2i}$$

y considerando (4)

30) $$y - Z = \frac{K_1(q-r)}{2i} + \frac{np}{2i}$$

de donde

$$r = q - \frac{2\,i\,(y-z)}{K_1} + \frac{np}{K_1}$$

valor que reemplazado en 29 nos da:

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{d^2X'}{dx^2} = r' - q + \frac{4\,i\,(y-z}{K_1} - \frac{2\,n\,p}{K_1}$$

Esta ecuación con la 28 nos da:

31) $$\frac{d^2E \quad \dfrac{d^2 y - y\,z}{d\,x^2}}{d\,x^2} = r' - q + \frac{4\,i\,(y-z}{K_1} - \frac{2\,n\,p}{K_1}$$

y considerando la ecuación (30)

32) $$\frac{d^2E \quad \dfrac{d^2 y + z}{d\,x^2}}{d\,x^2} = r' + q - 2\,r$$

La ecuación (30) es la ecuación diferencial del problema. En efecto, E e i son funciones conocidas de x, además p, q, r' $K_1$, n son constantes conocidas. Haciendo $y - z = w$ dicha ecuación queda en la forma

$$E\,\frac{d^4 w}{dx^3} + 2\,\frac{dE}{dx}\quad\frac{d^3 w}{d\,x^3} + \frac{d^2E}{d\,x^2}\cdot\frac{d^2 w}{d\,x^2} = A + \frac{4\,i\,w}{K_1}$$